Задание В5

Теоретические сведения

Линейное и квадратное уравнения

Для решения этих задач достаточно уметь решать линейные уравнения, помнить формулы сокращенного умножения, правило переноса слагаемого из одной части уравнения в другую (знак этого слагаемого меняется на противоположный), формулу корней квадратного уравнения, и обладать определенными вычислительными навыками, связанными с арифметическими действиями над целыми числами и дробями.

Формулы сокращенного умножения
Формулы для квадратов

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Формулы для кубов

- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
- $a^3 \perp b^3 = (a \perp b)(a^2 \mp ab + b^2)$

Корни квадратного уравнения

Общая формула вычисления корней:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

где a, b, c — коэффициенты; $a \neq 0$.

Подкоренное выражение $b^2 - 4ac$ называется дискриминантом $D = b^2 - 4ac$:

- при $D > 0$ корней два;
- при $D = 0$ корень один (в некоторых контекстах говорят также о двух равных или совпадающих корнях);
- при $D < 0$ корней на множестве действительных чисел нет.

Дробно-рациональные уравнения

Для решения этих уравнений достаточно умения выполнять действия с алгебраическими дробями.

Действия с обыкновенными дробями

Расширение дроби. Значение дроби не меняется, если умножить её числитель и знаменатель на одно и то же число, отличное от нуля. Это преобразование называется расширением дроби. Например,

$$\frac{5}{9}=\frac{5\cdot 7}{9\cdot 7}=\frac{35}{63};\qquad \frac{2}{3}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{8}{12}.$$

Сокращение дроби. Значение дроби не меняется, если разделить её числитель и знаменатель на одно и то же число, отличное от нуля. Это преобразование называется сокращением дроби. Например,

$$\frac{18}{27}=\frac{2\cdot \cancel{9}}{3\cdot \cancel{9}}=\frac{2}{3};\qquad \frac{21}{28}=\frac{3\cdot \cancel{7}}{4\cdot \cancel{7}}=\frac{3}{4}.$$

Сравнение дробей. Из двух дробей с одинаковыми числителями та больше, знаменатель которой меньше:

$$\frac{3}{5}>\frac{3}{7};\qquad \frac{2}{9}<\frac{2}{3}.$$

Из двух дробей с одинаковыми знаменателями та больше, числитель которой больше:

$$\frac{3}{5}>\frac{2}{5};\qquad \frac{5}{9}<\frac{7}{9}.$$

Для сравнения дробей, у которых числители и знаменатели различны, необходимо расширить их, чтобы привести к общему знаменателю.

П р и м е р . Сравнить две дроби:

$$\frac{2}{3}\ \text{и}\ \frac{7}{10}.$$

Расширим первую дробь на знаменатель второй, а вторую - на знаменатель первой:

$$\frac{2}{3}=\frac{20}{30};\quad \frac{7}{10}=\frac{21}{30}\text{, и мы видим, что } \frac{2}{3}<\frac{7}{10}\text{, т.к. } \frac{20}{30}<\frac{21}{30}.$$

Использованное здесь преобразование называется приведением дробей к общему знаменателю.

Сложение и вычитание дробей. Если знаменатели дробей одинаковы, то для того, чтобы сложить дроби, надо сложить их числители, а для того, чтобы вычесть дроби, надо вычесть их числители (в том же порядке). Полученная сумма или разность будет числителем результата; знаменатель останется тем же. Если знаменатели дробей различны, необходимо сначала привести дроби к общему знаменателю. При сложении смешанных чисел их целые и дробные части складываются отдельно. При вычитании смешанных чисел мы рекомендуем сначала преобразовать их к виду неправильных дробей, затем вычесть из одной другую, а после этого вновь привести результат, если требуется, к виду смешанного числа.

П р и м е р .

$$7\frac{1}{4}-4\frac{2}{3}=\frac{29}{4}-\frac{14}{3}=\frac{87}{12}-\frac{56}{12}=\frac{31}{12}=2\frac{7}{12}.$$

Умножение дробей. Умножить некоторое число на дробь означает умножить его на числитель и разделить произведение на знаменатель. Следовательно, мы имеем общее правило умножения дробей: для перемножения дробей необходимо перемножить отдельно их числители и знаменатели и разделить первое произведение на второе.

П р и м е р .

$$\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{9}=\frac{2\cdot 5}{7\cdot 9}=\frac{10}{63}.$$

Деление дробей. Для того, чтобы разделить некоторое число на дробь, необходимо умножить это число на обратную дробь.

П р и м е р . $\frac{3}{5}:\frac{12}{25}=\frac{3}{5}\cdot\frac{25}{12}=\frac{3\cdot 25}{5\cdot 12}=\frac{5}{4}.$

Иррациональные уравнения

Для решения уравнений необходимо помнить определение арифметического квадратного корня.

Арифметический корень

Как мы знаем, корень чётной степени имеет два значения: положительное и отрицательное. Так,

$\sqrt{25} = +5$ и -5, потому что $(+5)^2 = 25$ и $(-5)^2 = 25$.

Арифметическим корнем n–й степени из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n–я степень которого равна a .

Алгебраическим корнем n–й степени из данного числа называется множество всех корней из этого числа. Алгебраический корень чётной степени имеет два значения: положительное и отрицательное, например:

$$\sqrt{49} = \pm 7.$$

Алгебраический корень нечётной степени имеет единственное значение: либо положительное, либо отрицательное. Например, арифметический корень

$\sqrt{49} = 7$, но не -7 (± 7 - это *алгебраический* корень).

И наоборот, кубический корень:

$\sqrt[3]{-27} = -3$, и это его единственное значение (*алгебраический* корень).

Арифметический корень тесно связан с понятием **абсолютной величины (модуля)** числа, а именно:

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & \text{при } a > 0, \\ 0, & \text{при } a = 0, \\ -a, & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

Иррациональное уравнение вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ называется простейшим и имеет решение при условии

$g(x) \geq 0$, следовательно

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Многие иррациональные уравнения могут быть сведены к простейшему. Как правило, при решении иррациональных уравнений используется один из *двух методов*:

1) метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень;
2) метод введения новых переменных.

При возведении обеих частей уравнения в одну и ту же четную степень, необходимо провести проверку найденных корней. Эта проверка осуществляется с помощью подстановки найденных значений неизвестного в исходное уравнение.

Тригонометрические уравнения

Основная идея решения любого тригонометрического уравнения, заключается в сведении его к одному или нескольким простейшим тригонометрическим уравнениям, т.е. к уравнениям вида

sinx=a, cosx=a, tgx=a.

Сведение производится с помощью тригонометрических тождеств.

Основные тригонометрические формулы

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\mathrm{tg}^2\alpha - 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$$

$$\mathrm{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \mathrm{cosec}^2\,\alpha$$

Формулы сложения аргументов

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

$$\mathrm{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{ctg}\,\alpha\,\mathrm{ctg}\,\beta \mp 1}{\mathrm{ctg}\,\beta \pm \mathrm{ctg}\,\alpha}$$

Формулы двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$$

$$\mathrm{ctg}\,2\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^2\alpha - 1}{2\,\mathrm{ctg}\,\alpha}$$

Формулы преобразования произведений функций

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2}$$

Формулы преобразования суммы функций

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

Решение простых тригонометрических уравнений

- $\sin x = a$.

  Если $|a| > 1$— вещественных решений нет.
  Если $|a| \leqslant 1$ — решением является число вида
  $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n;\ n \in \mathbb{Z}$.

- $\cos x = a$.

  Если $|a| > 1$ — решений нет.
  Если $|a| \leqslant 1$ — решением является число вида
  $x = \pm \arccos a + 2\pi n;\ n \in \mathbb{Z}$.

- $\operatorname{tg} x = a$.

  Решением является число вида $x = \operatorname{arctg} a + \pi n;\ n \in \mathbb{Z}$.

- $\operatorname{ctg} x = a$.

  Решением является число вида $x - \operatorname{arcctg} a + \pi n;\ n \in \mathbb{Z}$.

Поскольку ответом к задаче может быть целое число или десятичная дробь, в качестве дополнительного условия требуется обратить либо на наименьший положительный корень, либо на наибольший отрицательный корень уравнения.

Показательные уравнения

Решение большинства показательных уравнений сводятся к решению одного или нескольких простейших показательных уравнений.

Простейшим показательным уравнением является уравнение

$$\boldsymbol{a^x = b}, \ (1)$$

где ***a*** и ***b*** — данные положительные числа (***a*** =/= 1), а ***x*** — неизвестная величина. Такое уравнение имеет единственный корень $x = \log_{a} \boldsymbol{b}$. Более сложные показательные уравнения часто сводятся либо к алгебраическим уравнениям, либо к уравнениям вида (1).

Разбор задания

Рассмотрим основные способы решения показательных уравнений на частных примерах.

Решить уравнение

$$5^{x-6} = 5^{15-2x},$$

Решение подобных уравнений основано на следующем свойстве степеней: если две степени одного и того же положительного числа, отличного от 1, равны, то равны и их показатели. В данном случае это свойство степеней дает:

$$x - 6 = 15 - 2x,$$

откуда $x = 7$.

<u>Проверка.</u> При $x = 7$ $5^{x-6} = 5$, $5^{15-2x} = 5$. Значит, $x = 7$ — корень данного уравнения.

<u>Ответ</u> $x = 7$.

Аналогично решается уравнение

$7^{2x-4}=(1/49)^x$

$1/49=7^{-2}$

$7^{2x-4}=7^{-2x}$

$2x-4=-2x$

$2x+2x=4$

$x=1$

По этому же принципу можно решать и показательное уравнение $\boldsymbol{a}^x = \boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{b}$ есть целая степень числа $\boldsymbol{a}$. Например, если $3^x = 27$, то, представив 27 в виде $27 = 3^3$, получаем $3^x = 3^3$, откуда $\boldsymbol{x} = 3$.

Иногда путем введения новой неизвестной величины показательное уравнение сводится к алгебраическому уравнению. Пусть, например, нужно решить уравнение

$$4^x + 2^x - 6 = 0.$$

Обозначим 2^x через $\boldsymbol{y}$. Тогда $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2 = \boldsymbol{y}^2$. Поэтому данное уравнение сводится к квадратному уравнению

$$\boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{y} - 6 = 0,$$

из которого получаем: $\boldsymbol{y}_1 = 2$, $\boldsymbol{y}_2 = -3$. Но $\boldsymbol{y} = 2^x$. Значит, если только данное уравнение имеет корни, то они должны удовлетворять либо уравнению $2^x = 2$, либо уравнению $2^x = -3$. Первое из этих уравнений имеет корень $\boldsymbol{x} = 1$; второе же уравнение корней не имеет, поскольку выражение 2^x не может принимать отрицательных значений. Итак, мы получили: $\boldsymbol{x} = 1$.

Проверка. При $\boldsymbol{x} = 1$

$$4^x + 2^x - 6 = 4^1 + 2^1 - 6 = 0.$$

Следовательно, $\boldsymbol{x} = 1$ — корень данного уравнения.

Ответ. $\boldsymbol{x} = 1$.

Логарифмические уравнения

При решении логарифмических уравнений и неравенств пользуются свойствами логарифмов.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b.$$

Основное логарифмическое тождество:

$$a^{\log_a b} = b \ (a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0).$$

Свойства логарифмов $(a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 0)$:

1) $\log_a a = 1$
2) $\log_a 1 = 0$
3) $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
4) $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
5) $\log_a b^p = p \cdot \log_a b$
6) $\log_{a^q} b = \dfrac{1}{q} \cdot \log_a b,\ q \neq 0$
7) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a},\ c \neq 1$
8) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a},\ b \neq 1$ $\qquad \underline{\log_a b \cdot \log_b a = 1}$
9) $a^{\log_b c} = c^{\log_b a},\ c \neq 1,\ b \neq 1$

Десятичным логарифмом называется логарифм по основанию 10. Он обозначается **lg** , т.е. $\log_{10} N = \lg N$. Логарифмы чисел 10, 100, 1000, ... равны соответственно 1, 2, 3, …, т.е. имеют столько положительных единиц, сколько нулей стоит в логарифмируемом числе после единицы. Логарифмы чисел 0.1, 0.01, 0.001, ... равны соответственно –1, –2, –3, …, т.е. имеют столько отрицательных единиц, сколько нулей стоит в логарифмируемом числе перед единицей (считая и нуль целых). Логарифмы остальных чисел имеют дробную часть, называемую мантиссой. Целая часть логарифма называется характеристикой. Для практического применения десятичные логарифмы наиболее удобны.

Натуральным логарифмом называется логарифм по основанию е. Он обозначается **ln** , т.е. $\log_e N = \ln N$. Число е является иррациональным, его приближённое значение 2.718281828. Оно является пределом, к которому стремится число $(1 + 1 / n)^n$ при неограниченном возрастании n

Решение очень многих логарифмических уравнений после преобразований сводится к решению одного или нескольких уравнений вида

$\log_a f(x) = b$ или $\log_a f(x)= \log_a g(x)$

где $a>0$, $a\neq1$.

Решение большинства логарифмических уравнений после некоторых преобразований сводится к решению логарифмического уравнения вида $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ или совокупности таких уравнений. Приведем соответствующее равносильное преобразование:

$$\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1. \end{cases}$$

Второе неравенство системы можно заменить неравенством $g(x) > 0$ (какое из двух неравенств выбрать, зависит от того, какая из функций $f(x)$ или $g(x)$ имеет более простой вид). Для частных случаев равносильные системы становятся менее громоздкими. Укажем основные частные случаи (a и b — числа, $a>0$, $a \neq 1$).

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

$$\log_{h(x)} f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = (h(x))^b, \\ h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1. \end{cases} \qquad \log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b.$$

Обоснование таких переходов (вытекающих из свойств логарифмов) в письменной работе приводить совершенно не обязательно.
Основными методами решения логарифмических уравнений являются следующие:

- равносильные преобразования;
- переход к уравнению-следствию;
- замена переменной;
- разложение на множители.

Прежде чем переходить к решению примеров, сделаем несколько важных замечаний.
При решении уравнений (и неравенств), содержащих сумму двух и более логарифмов, следует помнить о том, что равенство $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a (f(x)g(x))$, выполняется не при любых значениях переменной, поскольку области определения его левой и правой частей различны. Левая часть

определена при $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ (каждая из функций положительна). Правая часть определена при $f(x) \cdot g(x) > 0$ (каждая из функций положительна, либо каждая из функций отрицательна). Таким образом, область определения правой части равенства $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a (f(x)g(x))$ шире области определения его левой части. Поэтому при решении уравнения переход от суммы логарифмов к логарифму произведения может привести к приобретению посторонних корней. Чтобы этого не случилось, нужно в самом начале решения выписать соответствующие ограничения или, получив корни, сделать проверку. Преобразование же логарифма произведения в сумму логарифмов таит еще больше опасностей: в этом случае область допустимых значений переменной сужается и при решении уравнения можно потерять корни. Поэтому, если такое преобразование все-таки необходимо, часто приходится рассматривать два случая:

а) $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, тогда

$$\log_a(f(x)g(x)) = \log_a f(x) + \log_a g(x);$$

б) $f(x) < 0$, $g(x) < 0$, тогда

$$\log_a (f(x)g(x)) = \log_a (-f(x)) + \log_a (-g(x)).$$

Вторая возможность перехода от логарифма произведения к сумме логарифмов заключается в преобразовании $\log_a (f(x)g(x))$ в сумму $\log_a |f(x)| + \log_a |g(x)|$. Это преобразование также не является равносильным, но оно ведет не к сужению, а к расширению области допустимых значений переменных. Поэтому потери решений здесь не происходит, но зато могут появиться посторонние решения. Следовательно, при использовании такого преобразования обязательной является проверка. Сделанные рекомендации остаются в силе для преобразования разности логарифмов в логарифм частного и наоборот, а также при решении систем уравнений (в этом случае $g(x)$ в приведенных рассуждениях следует заменить на $g(y)$).

Отметим еще, что при решении уравнений, содержащих выражения вида $\log_a f^{2n}(x)$, следует использовать формулу $\log_a f^{2n}(x) = 2n \cdot \log_a |f(x)|$. Если не поставить знак модуля, то получится равенство, в котором левая часть определена при всех x, таких что $f(x) \neq 0$, а правая часть — при всех x, таких что $f(x) > 0$. Следовательно, область определения левой части окажется шире, что может привести к потере корней при решении соответствующего уравнения.

Примеры заданий

Линейное квадратное или кубическое уравнение

Задание 1

Найдите корень уравнения: $x^2 - 17x + 72 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

Решение.

$$x^2 - 17x + 72 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9; \\ x = 8. \end{array}\right.$$

Ответ: 8.

Задание 2

Решите уравнение $(2x + 7)^2 = (2x - 1)^2$.

Решение.

$$(2x + 7)^2 = (2x - 1)^2 \Leftrightarrow 4x^2 + 28x + 49 = 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow 32x = -48 \Leftrightarrow x = -1{,}5.$$

Ответ: −1,5.

Задание 3

Найдите корень уравнения $(x - 1)^3 = -8$.

Решение.

Извлекая кубический корень из обеих частей уравнения, получаем x-1 = -2, откуда x=-1.

Ответ: −1

Задание 4

Найдите корень уравнения: $\frac{4}{7}x = 7\frac{3}{7}$.

Решение.

$$\frac{4}{7}x = 7\frac{3}{7} \Leftrightarrow \frac{4}{7}x = \frac{52}{7} \Leftrightarrow 4x = 52 \Leftrightarrow x = 13.$$

Ответ: 13.

Дробно-рациональные уравнения

Задание 1

Найдите корень уравнения: $\frac{1}{4x-1}=5$.

Решение.

$$\frac{1}{4x-1}=5 \Leftrightarrow 4x-1=\frac{1}{5} \Leftrightarrow 4x=1+\frac{1}{5} \Leftrightarrow 4x=\frac{6}{5} \Leftrightarrow x=\frac{3}{10}.$$

Ответ: 0,3.

Задание 2

Найдите корень уравнения: $\frac{x-119}{x+7}=-5$

Решение.

$$\frac{x-119}{x+7}=-5 \Leftrightarrow x-119=-5x-35 \Leftrightarrow 6x=84 \Leftrightarrow x=14.$$

Ответ: 14.

Задание 3

Решите уравнение $\frac{x+8}{5x+7}=\frac{x-8}{7x+5}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Решение.

$$\frac{x+8}{5x+7}=\frac{x+8}{7x+5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+8=0; \\ 5x+7=7x+5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-8; \\ x=1. \end{array}\right.$$

Ответ: 1.

<u>Примечание:</u> решая данное уравнение можно умножать крест на крест; получается квадратное уравнение, у него те же самые корни.

Задание 4

Решите уравнение $\frac{13x}{2x^2-7}=1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Решение.

$$\frac{13x}{2x^2-7}=1 \Leftrightarrow 2x^2-13x-7=0 \Leftrightarrow \Delta=169+56=225. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7; \\ x=-0{,}5. \end{array}\right.$$

Ответ: −0,5.

Иррациональные уравнения

Задание 1

Решите уравнение $\sqrt{\frac{1}{5-2x}}=\frac{1}{3}$.

Решение.

$$\sqrt{\frac{1}{5-2x}}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{1}{5-2x}=\frac{1}{9}\Leftrightarrow 5-2x=9\Leftrightarrow x=-2.$$

Ответ: −2.

Задание 2

Найдите корень уравнения $\sqrt{3x-8}=5$.

Решение.

$$\sqrt{3x-8}=5\Leftrightarrow 3x-8=25\Leftrightarrow 3x=33\Leftrightarrow x=11.$$

Ответ: 11.

Задание 3

Найдите корень уравнения: $\sqrt{-72-17x}=-x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

Решение.

$$\sqrt{-72-17x}=-x\Leftrightarrow\begin{cases}-72-17x=x^2,\\-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-72-17x=x^2,\\x\le 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-9;\\x=-8,\end{array}\right.\\x\le 0.\end{cases}$$

Ответ: −9.

Задание 4

Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x-4}=3$.

Решение.

$$\sqrt[3]{x-4}=3\Leftrightarrow x-4=27\Leftrightarrow x=31.$$

Ответ: 31.

Задание 5

Решите уравнение $\sqrt{6+5x}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Решение.

$$\sqrt{6+5x}=x \Leftrightarrow \begin{cases} 6+5x=x^2, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x-6=0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=6. \end{array}\right. \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=6.$$

Уравнение имеет единственный корень, он и является ответом.

Ответ: 6.

Тригонометрические уравнения

Задание 1

Найдите корень уравнения: $\cos\frac{\pi(x-7)}{3}=\frac{1}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

Решение.

$$\cos\frac{\pi(x-7)}{3}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{\pi(x-7)}{3}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n\Leftrightarrow x-7=\pm1+6n\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=8+6n;\\x=6+6n\end{array}\right.$$

где n— целое число.

Наибольшим отрицательным корнем будет $x=8-12=-4$.

Ответ: −4.

Задание 2

Решите уравнение $\sin\frac{\pi x}{3}=0,5$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

Решение.

Решим уравнение:

$$\sin\frac{\pi x}{3}=0,5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{\pi x}{3}=\frac{\pi}{6}+2\pi k;\\\frac{\pi x}{3}=\frac{5\pi}{6}+2\pi k\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}+6k;\\x=\frac{5}{2}+6k,k\in Z.\end{array}\right.$$

Наименьшим положительным решением является 0,5.

Ответ: 0,5.

Задание 3

Решите уравнение $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}=-1$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

Решение.

$$tg\frac{\pi x}{4}=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{\pi x}{4}=-\frac{\pi}{4};\\\frac{\pi x}{4}=\frac{3\pi}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1;\\x=3.\end{array}\right.$$

Ответ: −1.

Показательные уравнения

Задание 1

Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{9}\right)^{x-13}=3$.

Решение.

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x-13}=3 \Leftrightarrow (3^{-2})^{x-13}=3^1 \Leftrightarrow 3^{-2x+26}=3^1 \Leftrightarrow -2x+26=1 \Leftrightarrow x=12.5$$

Ответ: 12,5.

Задание 2

Найдите корень уравнения $2^{4-2x}=64$.

Решение.

$$2^{4-2x}=64 \Leftrightarrow 2^{4-2x}=2^6 \Leftrightarrow 4-2x=6 \Leftrightarrow x=-1.$$

Ответ: −1.

Задание 3

Найдите корень уравнения $16^{x-9}=\frac{1}{2}$.

Решение.

$$16^{x-9}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-4x+36}=\left(\frac{1}{2}\right)^1 \Leftrightarrow -4x+36=1 \Leftrightarrow x=8.75.$$

Ответ: .8,75

Задание 4

Найдите корень уравнения $5^{x-7}=\frac{1}{125}$.

Решение.

$$5^{x-7}=\frac{1}{125} \Leftrightarrow 5^{x-7}=5^{-3} \Leftrightarrow x-7=-3 \Leftrightarrow x=4.$$

Ответ: 4.

Логарифмические уравнения

Задание 1

Найдите корень уравнения $\log_5(4+x)=2$.
Решение.

$$\log_5(4+x)=2 \Leftrightarrow 4+x=5^2 \Leftrightarrow 4+x=25 \Leftrightarrow x=21.$$

Ответ: 21.

Задание 2

Решите уравнение $\log_{x-5} 49=2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.
Решение.
На ОДЗ перейдем к уравнению на основание логарифма:

$$\log_{x-5}49=2 \Leftrightarrow \begin{cases}(x-5)^2=49,\\ x-5>0,\ x-5\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-5=\pm 7,\\ x-5>0,\ x-5\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow x-5=7 \Leftrightarrow x=12.$$

Итак, на уравнение имеет только один корень.

Ответ: 12.

Задание 3

Найдите корень уравнения $\log_4(x+3)=\log_4(4x-15)$.

Решение.

Логарифмы двух выражений равны, если сами выражения равны и при этом положительны:

$$\log_4(x+3)=\log_4(4x-15) \Leftrightarrow \begin{cases}x+3=4x-15,\\ 4x-15>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=6,\\ 4x>15\end{cases} \Leftrightarrow x=6.$$

Ответ: 6.

Задание 4

Решите уравнение $\log_5(x^2+2x)-\log_5(x^2+10)$.
Решение.

$$\log_5(x^2+2x)=\log_5(x^2+10) \Leftrightarrow x^2+2x=x^2+10 \Leftrightarrow x=5.$$

Ответ: 5.

Задание 5

Решите уравнение $\log_5(7-x) = \log_5(3-x)+1$.
Решение.

$$\log_5(7-x) = \log_5(3-x)+1 \Leftrightarrow \log_5(7-x) = \log_5(3-x)+\log_5 5 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x>0, \\ 7-x = 15-5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3, \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: 2.

Задание 6

Найдите корень уравнения $\log_5(5-x) = 2\log_5 3$.
Решение.

$$\log_5(5-x) = 2\log_5 3 \Leftrightarrow 5-x = 3^2 \Leftrightarrow 5-x=9 \Leftrightarrow x=-4.$$

Ответ: −4.

Задача B5

Подготовительные задания

1 Решите уравнение $26-13x=0$.

2 Решите уравнение $\sqrt{x}=7$.

3 Решите уравнение $\log_5 x=2$.

4 Решите уравнение $\sqrt{x}=0{,}3$.

5 Решите уравнение $\log_2 x=-3$.

6 Решите уравнение $2^x=16$.

7 Решите уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{32}$.

8 Решите уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^x=16$.

9 Решите уравнение $5^{-x}=125$.

10 Решите уравнение $\sqrt{x-3}=6$.

Зачетные задания

1 Решите уравнение $(2x+7)^2=(2x-5)^2$.

2 Решите уравнение $\frac{5x-4}{6}=\frac{4x-5}{5}$.

3 Решите уравнение $(x-8)^2=-32x$.

4 Решите уравнение $\frac{1}{11}x^2=9\frac{1}{11}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

5 Решите уравнение $\frac{1}{x+2}=\frac{2}{x}$.

6 Решите уравнение $\sqrt{20-3x}=\sqrt{5}$.

7 Решите уравнение $\sqrt{11+5x}=x+3$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

8 Решите уравнение $\sin\frac{\pi x}{12}=-0{,}5$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень уравнения.

9 Найдите корень уравнения $2^x\cdot 3^x=36^{x-4}$.

10 Найдите корень уравнения $2\log_4(3x-5)=\log_2(15-x)$.

Ответы:

Задача B5. Подготовительные задания
1. 2. **2.** 49. **3.** 25. **4.** 0,09. **5.** 0,125. **6.** 4. **7.** 5. **8.** –4. **9.** –3. **10.** 39.

Зачетные задания
1. –0,5. **2.** –10. **3.** –8. **4.** –10. **5.** –4. **6.** 5. **7.** 1. **8.** –2. **9.** 8. **10.** 5.

Контрольная работа №5

1. Решите уравнение

$$x^2+9=(x+9)^2.$$

2. Решите уравнение

$$2x^2-9x-5=0.$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

3. Решите уравнение

$$\frac{x+5}{x-5}=-9.$$

4. Решите уравнение

$$x=\frac{x}{x+5}.$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

5. Решите уравнение

$$\sqrt{6-5x}=6.$$

6. Решите уравнение

$$\sqrt{7+6x}=x.$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

7. Решите уравнение

$$\cos \pi x=0.$$

В ответе запишите наибольший отрицательный корень уравнения.

8. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}\frac{\pi x}{3} = \sqrt{3}.$$

В ответе запишите наименьший положительный корень уравнения.

9. Решите уравнение

$$8^{6-x} = 64.$$

10. Решите уравнение

$$8^{9-x} = 64^x.$$

11. Найдите корень уравнения

$$\log_{25}(x-4) = 0{,}5.$$

12. Решите уравнение

$$\log_5(x^2+2x) = \log_5(x^2+10).$$

Текстовые задачи

В вариантах экзаменов задачи встречаются в заданиях В1 и В13 . Текстовые задачи часто вызывают затруднения у учащихся. Причина чаще всего в том, что данная тема изучается в младших классах, причем непродолжительно, а в старших классах к этой теме совсем не возвращаются. Тем не менее, учеников нужно надо подготовить к решению таких задач рассмотрим наиболее часто встречающиеся виды задач.

Различные виды задач на проценты

Определение процента от числа

Найти: 25% от 120.
Решение:
1) 25% = 0,25;
2) 120 · 0,25 = 30.
Ответ: 30.

Определение числа по известной его части, выраженной в процентах

Найти число, если 15% его равны 30.
Решение:
1) 15% = 0,15;
2) 30 : 0,15 = 200.
или:
x - данное число;
0,15·x = 300;
x = 200.
Ответ: 200.

После рассмотрения этих простейших задач можно рассмотреть задачи типа:
1. На сколько процентов 10 больше 6?
2. На сколько процентов 6 меньше 10?
Решение:
1. ((10 - 6)·100%)/6 = 66 2/3 %
2. ((10 - 6)·100%)/10 = 40%

Что произойдет с ценой товара, если сначала ее повысить на 25%, а потом понизить на 25%?
Решение:
Пусть цена товара x руб.
1) x + 0,25x = 1,25x;
2) 1,25x - 0,25·1,25x = 0,9375x
3) x - 0,9375x = 0,0625x
4) 0,0625x/x · 100% = 6,25%
Ответ: первоначальная цена товара снизилась на 6,25%.

Свежие грибы содержали по массе 90% воды, а сухие 12%. Сколько

получится сухих грибов из 22 кг свежих?
Решение:
1) 22 · 0,1 = 2,2 (кг) - грибов по массе в свежих грибах;
2) 2,2 : 0,88 = 2,5 (кг) - сухих грибов, получаемых из свежих.
Ответ: 2,5 кг.

При решении задач на проценты приходится сталкиваться с понятием "процентное содержание", "концентрация", "%-й раствор". Поэтому предлагаю задачи на эти понятия.

Процентное содержание. Процентный раствор.

Задача:

Сколько кг соли в 10 кг соленой воды, если процентное содержание соли 15%.

10 · 0,15 = 1,5 (кг) соли.
Ответ: 1,5 кг.

Процентное содержание вещества в растворе (например, 15%), иногда называют %-м раствором, например, 15%-й раствор соли.

Задача:

Сплав содержит 10 кг олова и 15 кг цинка. Каково процентное содержание олова и цинка в сплаве?

Решение:

Процентное содержание вещества в сплаве - это часть, которую составляет вес данного вещества от веса всего сплава.

1) 10 + 15 = 25 (кг) - сплав;
2) 10/25 · 100% = 40% - процентное содержание олова в сплаве;
3) 15/25 · 100% = 60% - процентное содержание цинка в сплаве;
Ответ: 40%, 60%.

Концентрация.

Если концентрация вещества в соединении по массе составляет р%, то это означает, что масса этого вещества составляет р% от массы всего соединения.

Пример.

Концентрация серебра в сплаве 300 г составляет 87%. Это означает, что чистого серебра в сплаве 261 г.
300 · 0,87 = 261 (г).

В этом примере концентрация вещества выражена в процентах.

Отношения объема чистой компоненты в растворе ко всему объему смеси называется объемной концентрацией этой компоненты.

Сумма концентраций всех компонент, составляющих смесь, равна 1. В этом случае концентрация - безразмерная величина.

Если известно процентное содержание вещества, то его концентрация находится по формуле:

$$к = \frac{p}{100\%}$$

к - концентрация вещества;

p - процентное содержание вещества (в процентах).

Дополнительные задачи.

1. Имеется 2 сплава, в одном из которых содержится 40%, а в другом 20% серебра. Сколько кг второго сплава нужно добавить к 20 кг первого, чтобы после сплавления вместе получить сплав, содержащий 32% серебра?

Решение:

Пусть к 20 кг первого сплава нужно добавить x кг второго сплава. Тогда получим (20 + x) кг нового сплава. В 20 кг первого сплава содержится $0{,}4 \cdot 20 = 8$ (кг) серебра, в x кг второго сплава содержится 0,2x кг серебра, а в (20+x) кг нового сплава содержится $0{,}32 \cdot (20+x)$ кг серебра. Составим уравнение:

$$8 + 0{,}2x = 0{,}32 \cdot (20 + x);$$

$$x = 13\ 1/3.$$

Ответ:

13 1/3 кг второго сплава нужно добавить к 20 кг первого, чтобы получить сплав, содержащий 32% серебра.

2. К 15 л 10%-ного раствора соли добавили 5%-ный раствор соли и получили 8%-ный раствор. Какое количество литров 5%-ного раствора добавили?

Решение.

Пусть добавили x л 5%-ного раствора соли. Тогда нового раствора стало (15 + x) л, в котором содержиться $0{,}8 \cdot (15 + x)$ л соли. В 15 л 10%-ного раствора содержится $15 \cdot 0{,}1 = 1{,}5$ (л) соли, в x л 5%-ного раствора содержится 0,05x (л) соли. Составим уравнение.

$$1{,}5 + 0{,}05x = 0{,}08 \cdot (15 + x);$$

$$x = 10.$$

Ответ:

добавили 10 л 5%-ного раствора.

Задачи на движение

Задача 7.41. *Из деревни на станцию выехал грузовик, а через 30мин из деревни в том же направлении выехал легковой автомобиль, который догнал грузовик в 30км от станции. После прибытия на станцию легковой автомобиль сразу же повернул назад и встретил грузовик в 6км от станции. Сколько времени понадобилось легковому автомобилю, чтобы догнать грузовик?*

Пусть x км/ч скорость грузовика, y км/ч – легкового автомобиля, причем x>0, y>0.

		Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км
Между первой и второй встречами	Грузовик	x	$\frac{24}{x}$	30-6=24
	Легковой автомобиль	y	$\frac{36}{y}$	30+6=36

Т.к. грузовик и легковой автомобиль между первой и второй встречами были в пути одно и то же время, получаем уравнение: $\frac{24}{x} = \frac{36}{y}$. Из этого уравнения получаем: y=1,5x.

Введем ещё одну переменную: t ч (t>0) – время, затраченное легковым автомобилем до первой встречи с грузовиком.

		Скорость,км/ч	Время,ч	Расстояние,км
До первой встречи	Грузовик	x	t+0,5	x(t+0,5)
	Легковой автомобиль	1,5x	t	1,5xt

Так как грузовик и легковой автомобили были на этом этапе пути одно и то же время, получаем уравнение: 1,5xt=x(t+0,5). Откуда t=1.
Ответ: 1ч.
Другое решение:
Пусть автомобиль и грузовик до первой встречи проехали по x км, а y мин ехал до встречи автомобиль (x>0, y>0).

		Расстояние,км	Время,мин	Скорость,км/мин
До 1 встречи	автомобиль	x	y	$\frac{x}{y}$
	грузовик	x	y+30	$\frac{x}{y+30}$
До 2 встречи	автомобиль	36	$\frac{36y}{x}$	$\frac{x}{y}$
	грузовик	24	$\frac{24(y+30)}{x}$	$\frac{x}{y+30}$

Т.к. грузовик и легковой автомобиль между первой и второй встречами были в пути одно и то же время, получаем уравнение: $\frac{36y}{x}=\frac{24(y+30)}{x}$, 36y=24(y+30), y=60.
Ответ: до первой встречи легковой автомобиль ехал 1ч.

Задачи на движение по реке

Задача 7.42 *Плот проплывает путь из А в В за 12ч, а моторная лодка – за 3ч. За какое время моторная лодка преодолеет такое же расстояние в стоячей воде?*

Пусть x ед./ч – собственная скорость лодки, а y ед./ч – скорость течения реки.
По смыслу задачи: x>0, y>0.
Т.к. плот проплывает расстояние от А до В, то речь идет о движении по течению, а, следовательно, моторная лодка плывет со скоростью (x+y) ед./ч. За 12ч плот проплывает 12y ед., а лодка за 3ч 3(x+y) ед. По условию плот и моторная лодка проплыли одно и то же расстояние. Получаем уравнение: 12y=3(x+y). Откуда получаем: x=3y.
В задаче требуется найти значение выражения $\frac{12y}{x}$. Получаем: $\frac{12y}{x}$=4.
Ответ: за 4 часа.
Другое решение:
Примем условно расстояние от А до В за 1, тогда $\frac{1}{12}$ - скорость плота (скорость течения реки).
Пусть x ед./ч – скорость моторной лодки в стоячей воде (собственная скорость

лодки), $(x+\frac{1}{12})$ ед./ч – скорость лодки по течению,

$3(x+\frac{1}{12})$ед. – расстояние от А до В, получаем уравнение: $3(x+\frac{1}{12})=1$, $x=\frac{1}{4}$, $1: \frac{1}{4} =$ 4(ч) – в стоячей воде.

Задачи на совместную работу

(Старинная задача.) Лошадь съедает воз сена за месяц, коза — за два месяца, овца — за три месяца. За какое время лошадь, коза и овца вместе съедят такой же воз сена?

Приведем *старинное решение* задачи. Пусть лошадь, коза и овца едят сено 6 месяцев. Тогда лошадь съест 6 возов, коза — 3, а овца — 2. Всего 11 возов, значит, в месяц они съедают $\frac{11}{6}$ воза, а один воз съедят за $1 : \frac{11}{6} = \frac{6}{11}$ (месяца).

(Старинная задача.) Четыре плотника хотят построить дом. Первый плотник может построить дом за 1 год, второй — за 2 года, третий — за 3 года, четвертый — за 4 года. Спрашивается, за сколько лет они построят дом при совместной работе.

В 12 лет каждый плотник в отдельности сумеет построить: первый 12 дворов, второй — 6 дворов, третий — 4, четвертый — 3. Таким образом, за 12 лет они могут построить 25 дворов. Следовательно, один двор все вместе они сумеют построить за $\frac{365*12}{25} =$

= 175 дней.

Приведенные способы решения задач стоит показать детям для того, чтобы подчеркнуть важную мысль: авторы решений применяли такие рассуждения, видимо, потому, что не умели действовать с дробями.

Первая и вторая бригады могли бы выполнить задание за 9 дней; вторая и третья бригады — за 18 дней; первая и третья бригады — за 12 дней. За сколько дней это задание могут выполнить три бригады, работая вместе?

1) $1 : 9 = \frac{1}{9}$(задания) — выполняют I и II бригады за 1 день;

2) $1 : 18 = \frac{1}{18}$(задания) – выполняют II и III бригады за 1 день;

3) $1 : 12 = \frac{1}{12}$ (задания) – выполняют I и III бригады за 1 день;

4) $(\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{12}) : 2 = \frac{1}{8}$ (задания) – выполняют три бригады за 1 день совместной работы;

5) $1 : \frac{1}{8} = 8$ (дней) – время выполнения задания тремя бригадами.